

Comparative Study of Dimensionality Reduction Techniques for Aerodynamic Applications

Yu-Eop Kang
Aerospace Engineering
Seoul National University
08826, Seoul, Korea
kye72594@snu.ac.kr

Sunwoong Yang
Aerospace Engineering
Seoul National University
08826, Seoul, Korea
sunwoongy@gmail.com

Abstract

*Dimensionality reduction method*는 *high-dimensional data*의 *feature*를 효과적으로 추출해 주기 때문에 항공 분야에서도 최적설계, 민감도 분석, 불확실성 정량화 등 다양한 분야에 활용되고 있다. 특히, 최근에는 컴퓨터 비전 분야의 발전으로 인해 *deep neural network* 기반의 *non-linear dimensionality method* 또한 많이 적용되기 시작하고 있다. 그러나 기존 *linear based* 방법과 *nonlinear based* 방법을 다양한 상황에서 비교 분석하는 연구는 아직 부족한 실정이다. 본 프로젝트는 항공 분야의 *benchmark* 문제 중에서 *transonic airfoil*과 *cylinder problem*에 대하여 *linear/nonlinear based dimensionality method*의 성능을 다양한 관점에서 비교분석하였다. 특히, *dataset size*와 *latent variable*의 수를 *parameter*로 삼았다. 또한, 실제 *application*에서 사용되는 상황을 고려하여, *dimensionality reduction method*를 통해 추출된 *feature*들과 *유동 조건*에 대한 *regression model*을 만들고, *regression error*를 분석하였다.

1. Introduction

Computational fluid dynamic (CFD)는 experimental method에 비해 simulation cost가 상대적으로 저렴하고, similarity와 같은 일반성 문제에서 자유롭다는 장점 때문에 design optimization, sensitivity analysis, uncertainty quantification에 많이 사용된다. CFD에 주로 활용되는 finite difference method (FDM), finite volume method (FVM), finite element method (FEM)와 같은 수치해석 방법론들은 해석 공간을 discrete하게 fine grid으로 나누는 방식을 이용한다. 일반적으로 fine grid의 개수는 $10^6 \sim 10^8$ 의 order를 가지기 때문에 CFD data는 high-dimensional vector의 형태로 표현된다.

High-dimensional data는 curse of dimensionality 문제를 야기하기 때문에, 데이터 분석이나 예측 모델 학습을 어렵게 하는 요인이 된다. 기존 CFD 분야에서는 이를 해결하기 위해 proper orthogonal decomposition (POD) [15, 9, 3, 8], dynamic mode decomposition (DMD) [14] 등의 linear dimen-

sionality reduction method를 사용하였다. 이러한 방법들은 수학적으로 완결된 형태를 가지고, training data가 적은 문제에서 stability를 지니며, 결과 해석이 쉽다는 장점 때문에 CFD 분야에서 많이 활용되어 왔다.

한편, 최근에는 computer vision 분야의 성공에 영향을 받아 CFD 분야에서도 neural network 기반의 autoencoder (AE), convolutional autoencoder (CAE) [2] 등 nonlinear dimensionality reduction method가 적용되기 시작하고 있다. Nonlinear dimensionality reduction method가 가지는 높은 model capacity는 distributed flow, transonic flow 등 highly nonlinear problem에서 뛰어난 성능을 보인다는 것이 최근 연구들을 통해 밝혀지고 있다 [6, 5, 11].

그러나 기존 linear dimensionality reduction 방법과 nonlinear dimensionality reduction 방법을 체계적으로 비교한 연구는 아직 충분히 진행되지 않았다. 특히, large training set을 확보하기 어려운 aerodynamic application 특성을 고려하였을 때, linear/nonlinear dimensionality reduction 방법의 성능과 dataset size 간의 상관관계를 규명하는 것은 중요한 guideline이 될 수 있다. 본 프로젝트에서는 linear/nonlinear dimensionality reduction 방법들 중, 대표적인 두 모델 POD, AE의 성능을 dataset 특성에 따라 비교할 것이다.

2. Related work

2.1. Linear dimensionality reduction

초기 aerodynamic 분야의 linear dimensionality reduction은 fluid flow의 coherent feature를 추출하여 fluid-dynamic, transport 과정을 분석하는 것에 사용되었다. 대표적인 연구로는 proper orthogonal decomposition (POD)을 이용한 Sirovich et. al.의 연구가 있다 [15]. Sirovich는 high-dimensional CFD data에서 효율적으로 POD mode를 추출할 수 있는 method of snapshot을 이론적인 관점에서 제시하였다. 이 방법은 Holmes et al. [9], Dowell et al [3], and Hall et al. [8] 등의 후속연구에서 실제 fluid dynamic 문제에 다양하게 적용되었다.

한편, 특정 문제 상황에 대해서 POD 성능을 개선시키고자 하는 연구도 진행되었다. Schmid [14]는 temporal dataset

을 average sense로 접근하는 POD의 한계를 개선하기 위해 dynamic mode decomposition (DMD)를 제시하였다. 이 외에도 DMD에 optimization variables를 추가하여 일반화시킨 optimal mode decomposition(OMD) [16], physical constraint를 부여한 constrained proper orthogonal decomposition(CPOD) [17] 등 POD를 기반으로 한 다양한 방법론들이 존재한다.

앞서 제시된 linear dimensionality reduction 방법들은 mathematically clear하고, 주어진 dataset에 대하여 unique optimal solution을 제시한다는 장점을 가진다. 그러나 dataset을 orthogonal basis의 linear combination만으로 표현해야한다는 제약 때문에, 다양한 feature를 가지는 highly-nonlinear problem에서는 성능이 떨어지는 한계를 가지는 것으로 알려져 있다.

2.2. Nonlinear dimensionality reduction

대표적인 nonlinear dimensionality reduction method로는 neural network 기반의 AE가 있다. AE는 high-dimensional data를 latent space로 mapping하는 encoder와 latent space를 다시 high-dimensional data로 reconstruct하는 decoder로 이루어진다. 가장 간단한 형태의 AE는 encoder와 decoder가 fully connected layer로 이루어져있다. 각 layer의 activation function은 nonlinear feature를 반영하는 역할을 하고, activation function이 없는 AE의 경우에는 POD와 유사한 성질을 보이는 것으로 알려져 있다[1].

AE의 variation으로는 encoder와 decoder를 convolution layer와 deconvolution layer로 구성하여 이미지 데이터에 적합하게 변형한 convolutional AE (CAE) [2]가 존재한다. CFD 분야에서도 2D structured grid flow field의 경우 image data와 유사한 형태가 되는 점에서 착안하여 CAE를 적용한 연구들이 진행되었다 [6, 5, 11]. 이 외에도 variational autoencoder (VAE) 등 다양한 AE가 CFD 분야에서 적용되고 있다[7].

이러한 AE 기반의 nonlinear dimensionality reduction method는 linear based method에 비해 model capacity가 커서 nonlinear problem에 더 좋은 성능을 보이는 것으로 알려져 있다. 그러나 dataset에 쉽게 over-fitting 되는 경향을 가지기 때문에 dataset의 크기가 작은 경우 regularization 등을 통해 over-fitting을 방지하는 노력이 필요하다.

2.3. Dimensionality reduction combined with regression model

Linear/nonlinear dimensionality reduction을 통해 high-dimensional flow field data가 low-dimensional latent variable에 mapping되고 나면 이를 통해 flow structure나 transport process를 분석할 수 있다. 최근에는 dimensionality reduction method를 regression model과 결합하여 주어진 input condition에서 high-dimensional flow field를 예측할 수 있는 reduced order modeling (ROM)에 대한 연구 또한 활발하게 연구되고 있다 [13, 18, 4]. ROM은 dimension reduction을 통해 먼저 dataset을 latent variable로 mapping시키고, 이후 data를 generation한 input condition과 latent variable의 관계를 regression model로 학습시키

는 방식으로 진행된다. Regression model로는 전통적으로 Kriging (Gaussian process) [10]가 주로 활용되었지만 최근에는 artificial neural network 또한 많이 활용되고 있다. 이렇게 만들어진 ROM은 sensitivity analysis, design optimization 등 다양한 application에서 활용되고 있다.

3. Method

본 프로젝트는 다양한 linear/nonlinear dimensionality 중에서 POD와 AE의 성능을 유동장 문제에서 비교하는 것을 목적으로 한다.¹ 각 방법에 대한 자세한 수식과 설명은 본 프로젝트의 scope을 벗어나므로 위의 reference로 대체하기로 한다. 본 section에서는, CFD를 통한 data preparation 과정, generate된 각 dataset의 특성, 그리고 dimensionality reduction method의 성능평가 척도 대해 주로 다루기로 한다.

3.1. Data preparation

Data generation에는 structured grid 기반의 KFLOW [12]를 이용하였다. Benchmark problem으로는 transonic airfoil, unsteady cylinder problem 두가지를 선정하였으며, 각 문제 상황에 대한 자세한 설명은 다음과 같다.

3.1.1 Transonic airfoil

Transonic airfoil은 아음속 영역과 초음속영역이 혼재되어 있는 flow field를 가진다. 유동이 국소적으로 음속을 넘어 서면 압력의 discontinuity를 유발하는 충격파가 발생하게 되는데, 이것은 dataset에 매우 큰 nonlinearity를 만들어 낸다.

본 프로젝트에서는 dimensionality reduction method가 dataset이 가진 nonlinearity를 얼마나 효율적으로 reconstruction하는지 확인하기 위한 benchmark problem으로 transonic airfoil problem을 선정하였다. Airfoil은 RAE2822를 사용하였으며, flight speed = 88.5 269 m/s, angle of attack = 0.5 3 degree, flight altitude = 1,000 11,000 m 조건 범위에서 총 100개의 dataset을 generation 하였다. 해석 격자는 401 x 152 크기의 structured grid로 설정하였다.

3.1.2 Unsteady cylinder

저 레이놀즈 영역의 cylinder는 물체 후방에 Karman vortex라는 주기적인 unsteady 유동을 만들어낸다. 본 프로젝트에서는 dataset의 sequence가 서로 highly-correlated 되어 있을 때, dimension reduction method의 성능을 확인하기 위하여 benchmark problem으로 unsteady cylinder problem을 선정하였다. Ma=0.2, Re=200의 유동 조건에서 2주기 동안 총 100개의 dataset을 generation 하였다. 해석 격자는 201 x 89 크기의 structure grid로 설정하였다.

¹본래 CAE, VAE, CVAE 등 다른 방법에 대해서도 비교를 진행할 예정이었지만, parameter tuning이 잘 이루어지지 않아 유의미한 결과를 도출하지 못하였다. 추후 이에 대한 연구를 진행할 것이다.

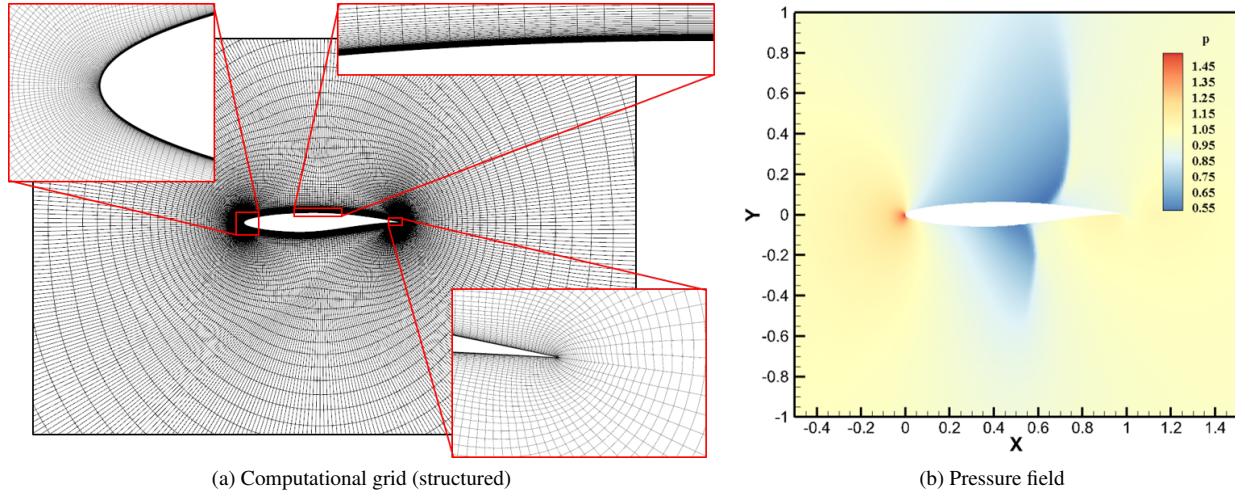


Figure 1: Computational grid and pressure field of transonic airfoil; Shockwave attached on the airfoil surface can be observed

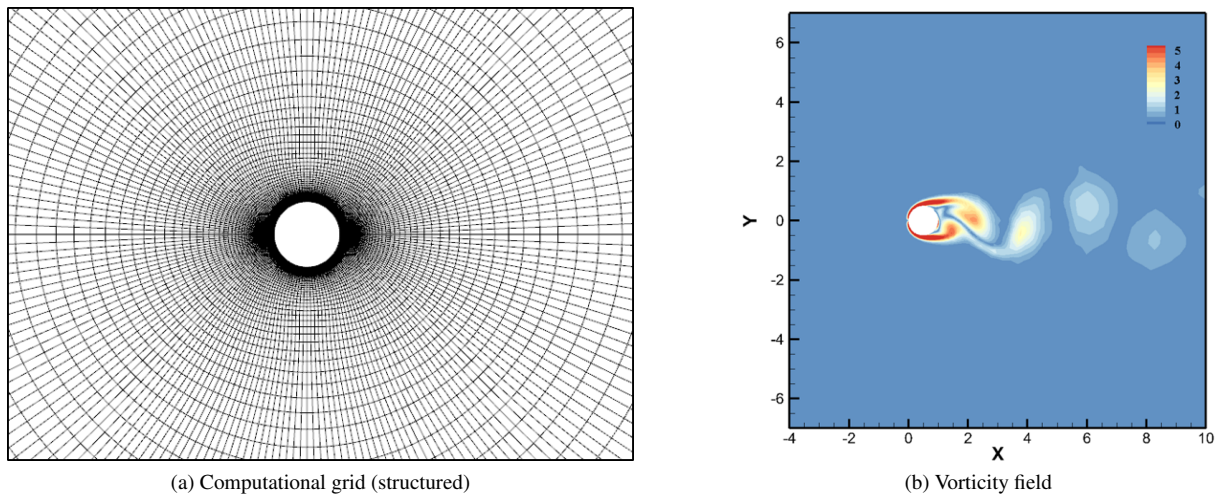


Figure 2: Computational grid and vorticity field of unsteady cylinder problem; oscillating vortex structure can be observed

3.2. Performance evaluation

각 모델에 대한 성능 평가는 train data와 test data를 나누어 진행하였다. Train data로 AE와 POD를 학습시킨 뒤에, test data가 원래 데이터로 reconstruction이 잘 되는지 확인하였다. Reconstruction 척도로는 각 grid의 physical quantity에 대한 normalized mean square error (NMSE)를 이용하였다. 한편, dimensionality reduction method를 통해 추출된 feature에 대한 regression error도 측정하였는데, 이것은 leave-one-out cross validation (LOOCV)을 이용하였다. LOOCV는 한 점을 제외한 나머지 데이터로 model을 학습시킨 뒤, 제외된 한 점과 예측 결과를 비교하여 model을 검증하는 방법이다.

4. Results and Discussion

본 section에서는 앞서 설정한 두 benchmark problem에 대하여 linear/nonlinear based dimensionality reduction technique을 비교할 것이다. 비교는 각 방법들의 reconstruction/, regression, prediction error에 대하여 이루어질 것이다.

4.1. Reconstruction error

4.1.1 Qualitative analysis

먼저, reconstruction error를 정성적으로 분석하였다. AE와 POD의 latent variable 수는 5개로 설정하였으며, train:test의 비율은 9:1로 설정하였다. 먼저, transonic

airfoil의 경우 충격파가 발생하지 않은 case와 충격파가 발생한 case를 대표 case로 선정하여 reconstruction 결과를 pressure contour로 Fig. 3 and 4에 제시하였다. 좌측부터 ground truth, reconstructed, residual이고 첫번째 줄이 AE 결과, 두번째 줄이 POD 결과이다. Residual은 ground truth에서 reconstructed 데이터를 뺀 값이다.

두 case 모두 전반적으로 AE가 POD보다 유동장을 잘 reconstruction하고 있는 것을 확인할 수 있다. 특히 비선형성이 강한 transonic regime (Fig. 4)의 경우, 충격파가 발생하여 압력구배가 급격하게 변하는 부분에서 두 방법의 residual 차이가 더 커지는 것을 볼 수 있다. 이것은 기존에 알려진 것처럼 AE가 비선형적인 feature를 더 잘 모델링할 수 있기 때문이라고 해석할 수 있다.

한편, AE가 POD에 비해 전반적으로 유동장을 정확하게 예측하고 있지만, residual 그래프에서 확인할 수 있는 것처럼 AE에서 약간의 noise가 생기는 것을 확인할 수 있다. 이에 대한 원인은 아직 정확하게 규명하진 못했지만, latent variable의 수가 늘어날수록 이러한 현상이 더욱 두드러지는 것으로 보아 AE의 model capacity와 연관된 것으로 추정된다. 데이터의 smoothness가 중요한 문제에서 AE를 사용할 경우에는 smoothness와 관련한 추가적인 loss term을 넣거나 latent variable 수 설정에 주의가 필요할 것으로 보인다. // Unsteady cylinder 데이터는 전반적으로 유사한 경향을 보였기 때문에 한 케이스만 선정하여 Fig. 5에 제시하였다. Reconstruction error는 transonic 문제에 비하여 10분의 1 수준으로 매우 낮게 나타났다. AE와 POD 모두 nonlinearity가 상대적으로 강한 후류 영역에서 error가 높게 측정되었으며, POD의 error가 더 높게 나타났다. 한편, transonic에서 관찰되었던 데이터가 noisy하게 reconstruction 되는 현상은 발견되지 않았다.

4.2. Quantitative analysis

정량적인 분석은 training data의 크기와 latent variable 수를 변경시키면서 모델을 학습시키고, test data에 대한 NMSE로 진행하였다. training data의 크기는 [10:20:90], latent variable 수는 [2:2:10]으로 설정하였으며, 학습에 활용되지 않은 나머지 데이터는 test에 활용되었다. AE의 경우 initialization마다 조금씩 다른 결과가 나오기 때문에 같은 실험을 총 5번 반복하여 중간값을 최종 값으로 설정하였다. Figure 5은 그 결과를 log scale로 나타낸 것이다.

먼저, 학습 데이터 수가 상대적으로 적은 경우 (50개 이하) latent variable 수에 상관 없이 AE보다 POD의 reconstruction error가 더 작은 것을 확인할 수 있다. 학습 데이터 수가 70개일 때는 latent variable 수가 적은 경우에는 AE가, 많은 경우에는 POD의 error가 더 작았으며, 학습 데이터 수가 상대적으로 많을 때는 latent variable 수에 상관 없이 autoencoder의 error가 더 작았다.

4.3. Regression error

Dimensionality reduction를 통해 추출된 유동장의 feature는 실제 application에 활용될 수 있다. Aerodynamic 분야에서 일반적으로 사용되는 방법은 이 feature와 input

condition 사이의 관계를 regression model 학습한 뒤에 input condition - feature - reconstructed data의 pipeline을 만드는 것이다. 이번 section에서는 POD와 AE를 통해 추출된 feature가 regression model을 만드는 관점에서는 어떤 특징을 가지는지 분석할 것이다. latent variable의 dimension은 5로 설정하였으며, regression model로는 Gaussian process regression (Kriging)을 이용하였다.² Train data로부터 추출된 90개의 feature와 그에 대응되는 유동 조건으로 학습을 진행하였으며, model evaluation은 leave-one-out cross validation (LOOCV) 방법을 이용하였다. 결과는 Fig. 8과 9에 제시되어 있다.

각의 figure의 첫번째 줄은 POD, 두번째 줄은 AE로 추출된 feature에 대한 LOOCV 결과이다. POD는 dominant feature가 먼저 뽑히기 때문에 왼쪽이 reconstruction에 더 dominant한 영향을 주는 model이고, AE는 무작위로 뽑히기 때문에 5개의 model의 영향이 동등하다. 그래프의 x축은 regression model을 통해 예측된 값, y축은 실제 값을 의미한다. 즉, 는 sample point들이 전부 y=x 위에 놓이게 되는 것이 이상적인 상황이다.

Transonic airfoil과 cylinder 문제에서 모두 POD가 AE보다 regression model이 더 잘 만들어지는 일관된 경향성을 관찰할 수 있었다. R-square 값을 통해서도 POD의 feature로 만들어진 regression model이 정확한 것을 정량적으로 확인할 수 있다. 이러한 현상은 POD와 AE가 feature를 추출하는 방식의 차이 때문에 발생하는 것으로 추정된다. 먼저, POD는 orthogonal basis의 linear combination으로 표현되는 linear space로 data를 projection하는 방식으로 feature를 뽑아낸다. 따라서, 각 feature들의 독립성이 보장되고, 그에 따라 input condition과 feature의 correlation이 잘 보존되는 것으로 생각된다. 반면, AE는 신경망의 activation function을 통해 nonlinear manifold에 data를 projection하기 때문에, POD에 비해서 regression model의 정확도가 떨어지는 것으로 추정된다. 이것은 dimensionality reduction과 regression 성능 사이에 일종의 trade-off 관계가 있다는 의미로 생각해볼 수도 있다. 이 부분에 대한 내용은 추후 연구를 통해 더 자세히 다루어질 수 있을 것이다.

4.4. Prediction error

마지막으로 AE와 POD의 prediction error를 비교해보았다. 여기에서 prediction이란 regression model을 통해서 예측된 feature들을 이용하여 다시 유동장을 reconstruction한 것을 의미한다. Regression model은 앞서 이야기한 것처럼 90개의 training set를 이용하여 학습하였고, 나머지 10개의 test set³으로 feature를 예측 후 유동장을 reconstruction 하였다. 결과는 table 1에 제시되어 있다.

먼저, AE의 경우 regression model의 error 영향 때문에 reconstruct error와 prediction error의 차이가 큰 것을 확인할 수 있다. Transonic Airfoil 문제의 경우 2.5배, cylinder 문제

²Gaussian process은 MLP에 비해 model parameter가 적기 때문에 학습이 더 안정적인 것으로 알려져있다. 따라서 leave-one-out cross validation 방식의 검증에 더 용이할 것으로 판단하여 regression model로 선정하였다.

³이 test data는 dimensionality reduction model이나 regression model을 만들는데 사용되지 않았다.

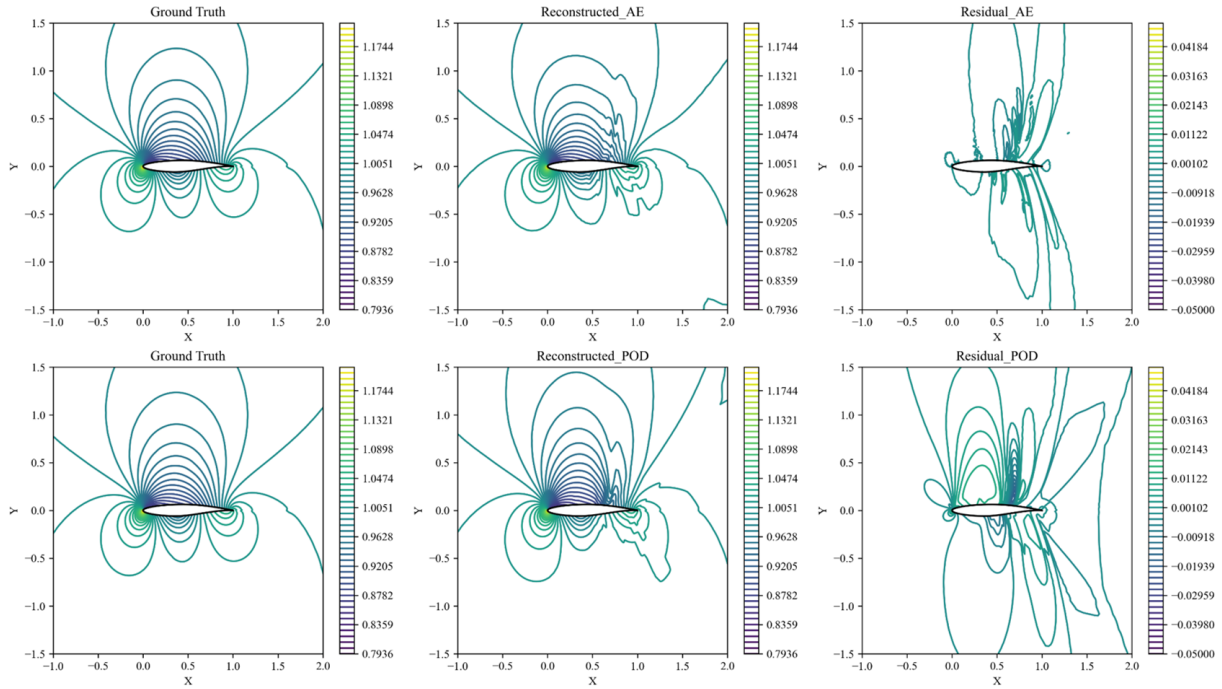


Figure 3: Comparison of the reconstruction error between autoencoder and proper orthogonal decomposition; Subsonic regime

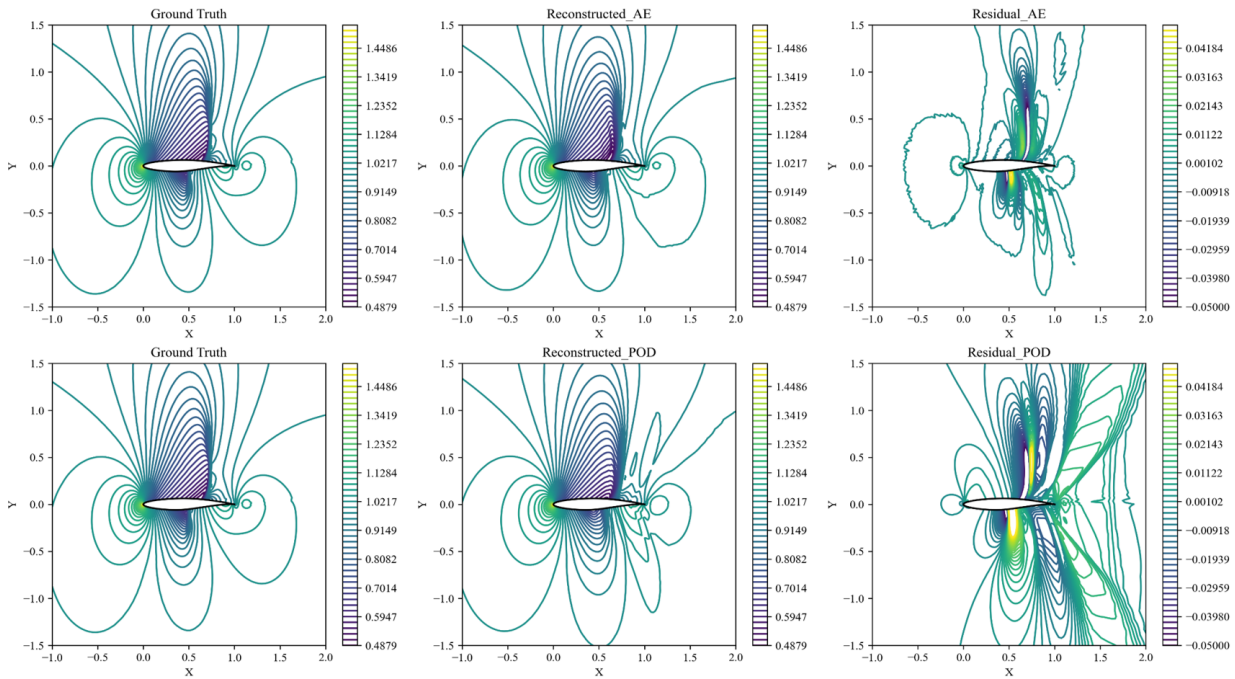


Figure 4: Comparison of the reconstruction error between autoencoder and proper orthogonal decomposition; Transonic regime

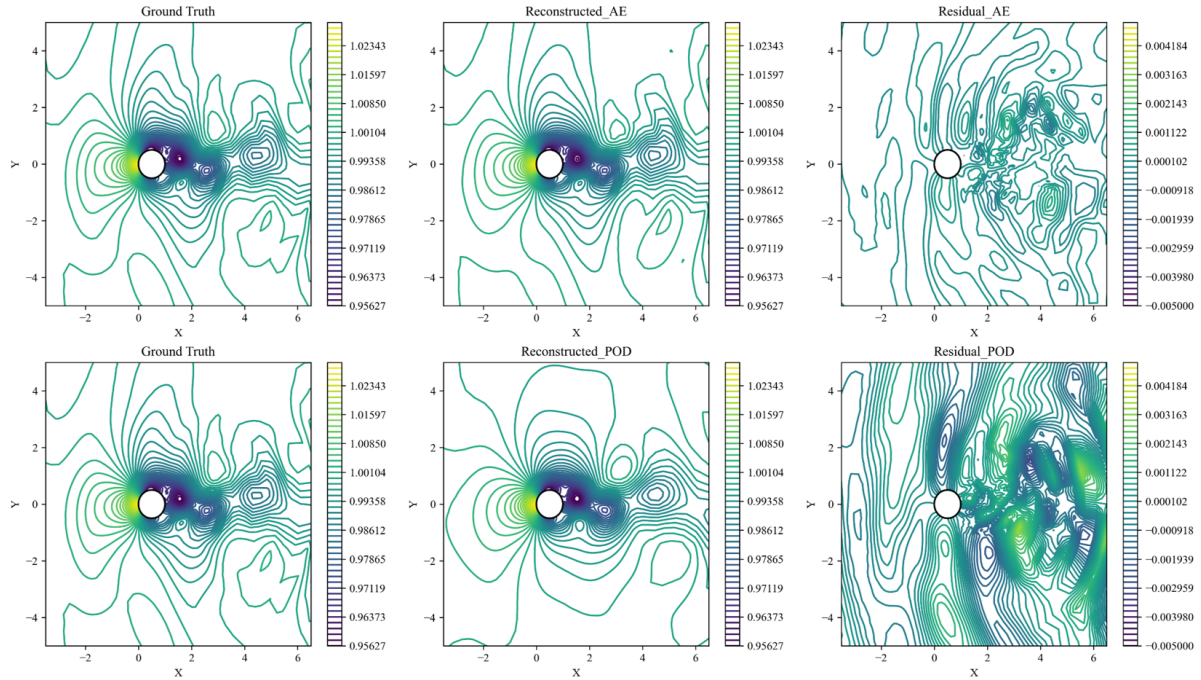


Figure 5: Comparison of the reconstruction error between autoencoder and proper orthogonal decomposition; Cylinder, Note that the range of contour map in residual plot is one-tenth that of the transonic case.

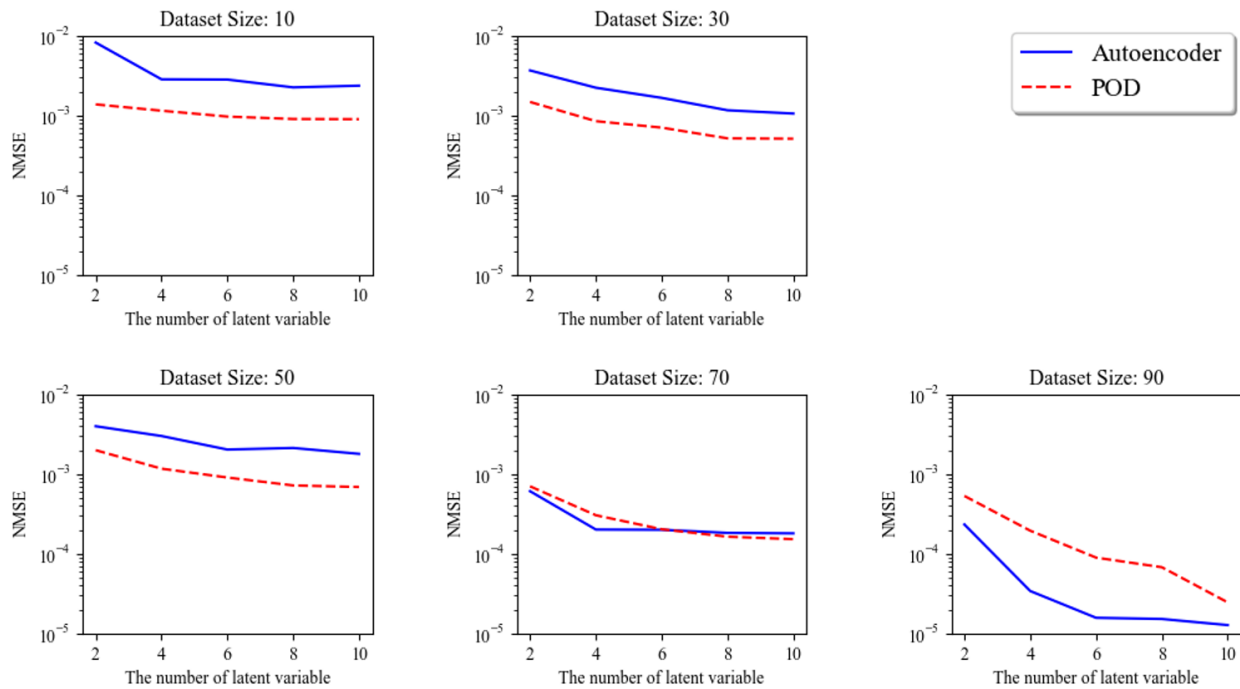


Figure 6: Comparison of reconstruction error with respect to the size of dataset and the number of latent variables; Transonic airfoil

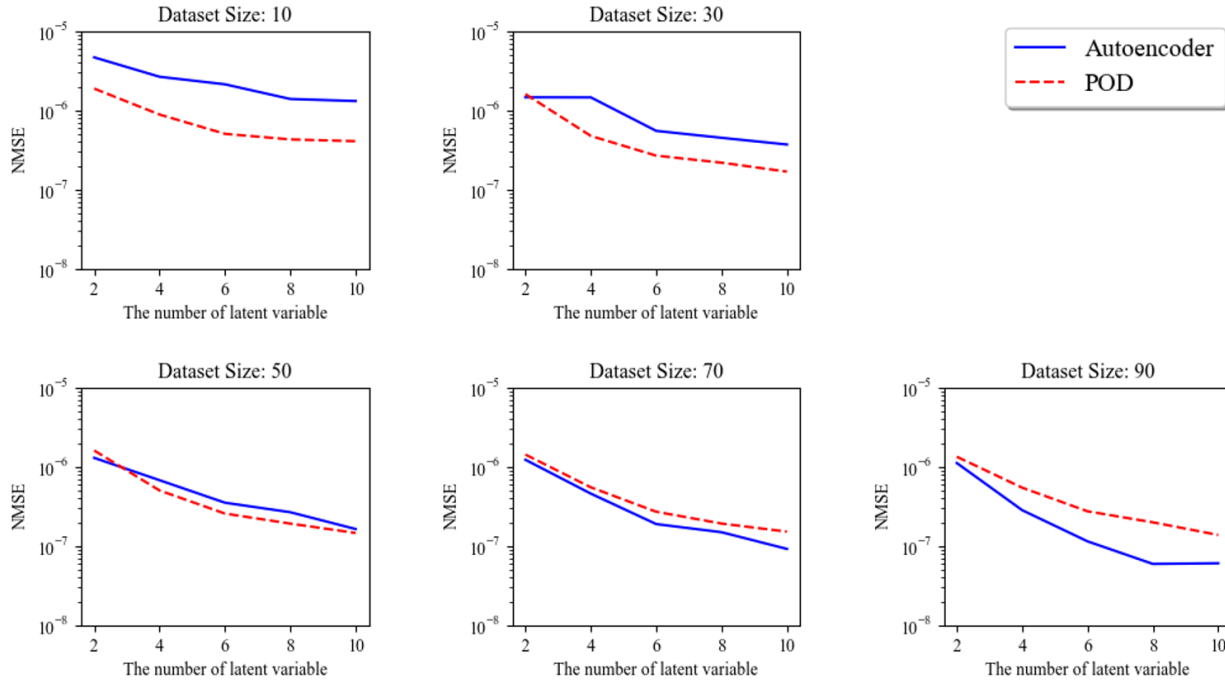


Figure 7: Comparison of reconstruction error with respect to the size of dataset and the number of latent variables; Cylinder

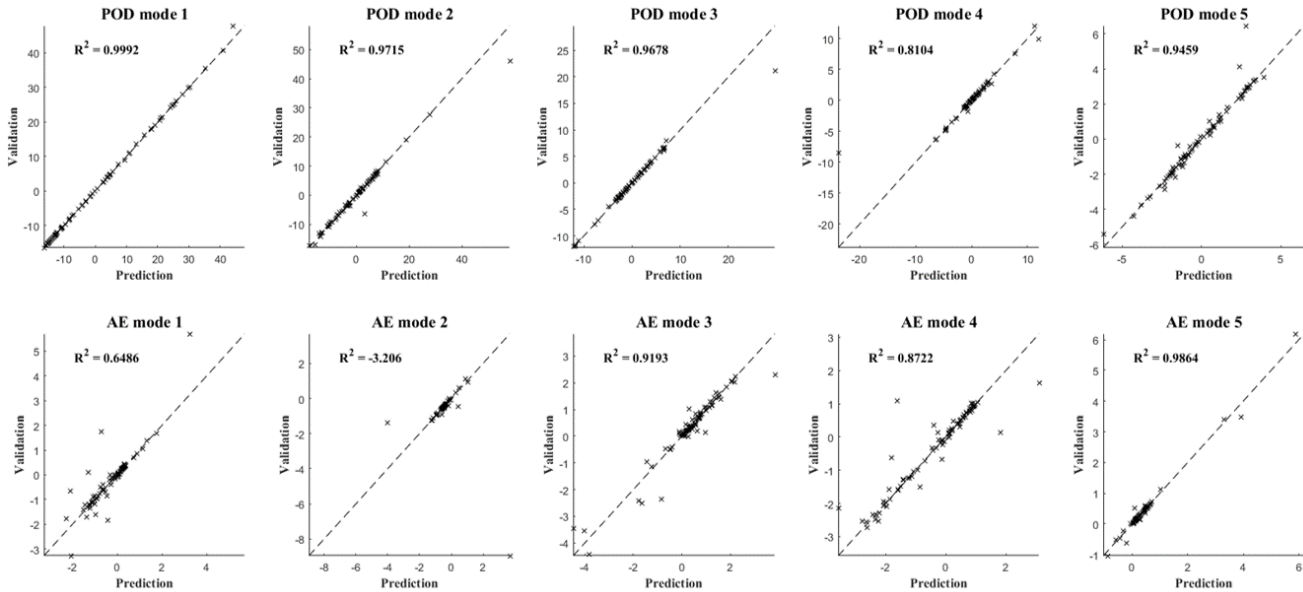


Figure 8: Comparison of regression error; Transonic airfoil

의 경우 1.4배 error가 증가했다. 반면, POD의 경우 reconstruction error와 prediction error의 차이가 크지 않은 것을 확인할 수 있다. 물론, regression error에 따른 성능 감소를 고려하더라도 전반적으로 AE가 POD에 비해서 우수한 성능을 보이고 있다. 그러나 training data의 크기가 AE의

reconstruction error가 가장 낮았던 90개임을 감안하였을 때, 데이터 수가 더 적어지는 경우에는 regression error에 따른 prediction 성능 감소가 더욱 커질 수 있을 것이다.

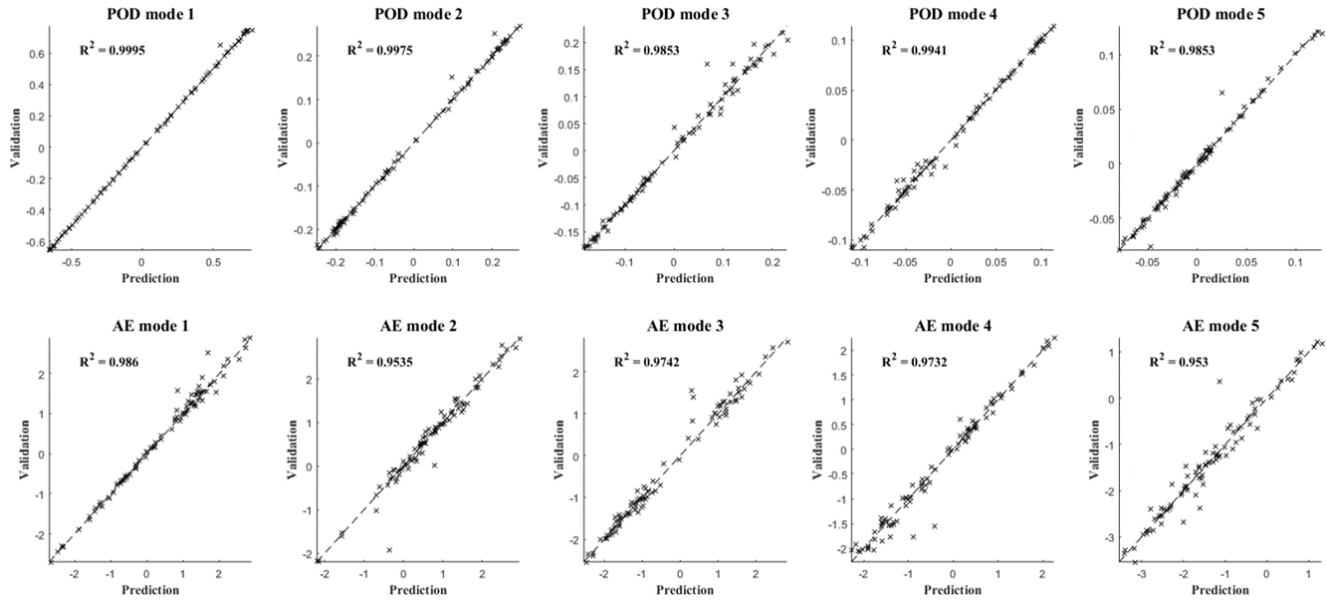


Figure 9: Comparison of regression error; Cylinder

Problem	Autoencoder		POD	
	Reconstruction	Prediction	Reconstruction	Prediction
Transonic Airfoil	1.95E-05	4.82E-05	1.10E-04	1.21E-04
Cylinder	2.52E-07	3.56E-07	3.53E-07	3.86E-07

Table 1: Comparison of regression and prediction error

5. Conclusion

본 프로젝트에서는 transonic airfoil 문제와 cylinder 문제에서 autoencoder와 proper orthogonal decomposition의 성능을 비교해보았다. 먼저 reconstruction error의 경우 정성적인 수준에서는 autoencoder가 proper orthogonal decomposition에 비하여 성능이 더 우수하였다. 그러나 일부 case의 경우 결과가 noisy하게 reconstruction되는 현상이 관찰되었다. 정량적인 수준에서는 dataset의 크기와 latent variable 수에 따라 결과를 비교하였고, dataset의 크기가 reconstruction error에 큰 영향을 미치는 것을 확인할 수 있었다. 데이터 수가 적은 경우에는 proper orthogonal decomposition autoencoder가 비해 reconstruction 성능이 우수하였고, 많은 경우에는 반대로 autoencoder가 더 우수하였다. 한편 autoencoder가 proper orthogonal decomposition 통해 추출된 feature에 대한 regression 성능의 경우, 데이터 수가 많은 상황에서도 proper orthogonal decomposition의 해 추출된 feature가 regression model이 더 잘 만들어졌다. 이러한 경향은 prediction error에 까지 전파되어, autoencoder의 reconstruction error와 prediction error의 큰 차이를 만들어냈다. 추후 연구로는 본 프로젝트에서 확인한 reconstruction noise 나 reconstruction/prediction error trade-

off 같은 현상의 원인을 더 다양한 상황에서 분석해볼 수 있을 것이다.

References

- [1] H. Boursard and Y. Kamp. Auto-association by multilayer perceptrons and singular value decomposition. *Biological cybernetics*, 59(4):291–294, 1988.
- [2] M. Chen, X. Shi, Y. Zhang, D. Wu, and M. Guizani. Deep features learning for medical image analysis with convolutional autoencoder neural network. *IEEE Transactions on Big Data*, 2017.
- [3] E. Dowell, K. Hall, J. Thomas, R. Florea, B. Epureanu, and J. Heeg. Reduced order models in unsteady aerodynamics. In *40th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, page 1261, 1999.
- [4] R. Dupuis, J.-C. Jouhaud, and P. Sagaut. Surrogate modeling of aerodynamic simulations for multiple operating conditions using machine learning. *Aiaa Journal*, 56(9):3622–3635, 2018.
- [5] K. Fukami, T. Nakamura, and K. Fukagata. Convolutional neural network based hierarchical autoencoder for nonlinear mode decomposition of fluid field data. *Physics of Fluids*, 32(9):095110, 2020.

- [6] F. J. Gonzalez and M. Balajewicz. Deep convolutional recurrent autoencoders for learning low-dimensional feature dynamics of fluid systems. *arXiv preprint arXiv:1808.01346*, 2018.
- [7] K. Gundersen, A. Oleynik, N. Blaser, and G. Alendal. Semi-conditional variational auto-encoder for flow reconstruction and uncertainty quantification from limited observations. *Physics of Fluids*, 33(1):017119, 2021.
- [8] K. C. Hall, J. P. Thomas, and E. H. Dowell. Proper orthogonal decomposition technique for transonic unsteady aerodynamic flows. *AIAA journal*, 38(10):1853–1862, 2000.
- [9] P. Holmes, J. L. Lumley, G. Berkooz, and C. W. Rowley. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge university press, 2012.
- [10] J. D. Martin and T. W. Simpson. Use of kriging models to approximate deterministic computer models. *AIAA journal*, 43(4):853–863, 2005.
- [11] R. Maulik, B. Lusch, and P. Balaprakash. Reduced-order modeling of advection-dominated systems with recurrent neural networks and convolutional autoencoders. *Physics of Fluids*, 33(3):037106, 2021.
- [12] S. H. Park and J. H. Kwon. Implementation of kw turbulence models in an implicit multigrid method. *AIAA journal*, 42(7):1348–1357, 2004.
- [13] O. San, R. Maulik, and M. Ahmed. An artificial neural network framework for reduced order modeling of transient flows. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 77:271–287, 2019.
- [14] P. J. Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of fluid mechanics*, 656:5–28, 2010.
- [15] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. i. coherent structures. *Quarterly of applied mathematics*, 45(3):561–571, 1987.
- [16] A. Wynn, D. Pearson, B. Ganapathisubramani, and P. Goulart. Optimal mode decomposition for unsteady flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 733:473–503, 2013.
- [17] M. Xiao, P. Breikopf, R. F. Coelho, C. Knopf-Lenoir, P. Villon, and W. Zhang. Constrained proper orthogonal decomposition based on qr-factorization for aerodynamical shape optimization. *Applied mathematics and computation*, 223:254–263, 2013.
- [18] J. Yu, C. Yan, and M. Guo. Non-intrusive reduced-order modeling for fluid problems: A brief review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 233(16):5896–5912, 2019.